แบบฝึกหัด DIFFERENTIATION

1. จงหาค่าอนุพันธ์อันดับ 1 (FIRST DIVIDED-DIFFERENCES) ของฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ ที่ x = 2 และใช้ h = 0.25 (Hin: สร้างตารางหาค่า x, f(x))

   1.1 โดยใช้วิธี forward divided-difference O(h) คำนวณค่าความผิดพลาดเทียบกับค่าจริง พร้อมทั้งเขียนโปรแกรม

   1.2 โดยใช้วิธี backward divided-difference O(h) คำนวณค่าความผิดพลาดเทียบกับค่าจริง พร้อมทั้งเขียนโปรแกรม

   1.3 โดยใช้วิธี central divided-difference $O(h^2)$ คำนวณค่าความผิดพลาดเทียบกับค่าจริง พร้อมทั้งเขียนโปรแกรม

2. จงหาค่าอนุพันธ์อันดับ 1 (FIRST DIVIDED-DIFFERENCES) ของฟังก์ชัน $f(x) = e^x + 3x$ ที่ x = 4 และใช้ h = 0.25 (Hin: สร้างตารางหาค่า x, f(x))

   2.1 โดยใช้วิธี forward divided-difference O(h) คำนวณค่าความผิดพลาดเทียบกับค่าจริง พร้อมทั้งเขียนโปรแกรม

   2.2 โดยใช้วิธี backward divided-difference O(h) คำนวณค่าความผิดพลาดเทียบกับค่าจริง พร้อมทั้งเขียนโปรแกรม

   2.3 โดยใช้วิธี central divided-difference $O(h^2)$ คำนวณค่าความผิดพลาดเทียบกับค่าจริง พร้อมทั้งเขียนโปรแกรม

3. จงแสดงวิธีทำ ทำไม first backward divided-difference มี error of order เท่ากับ h และ central divided-difference มี error of order เท่ากับ h^2 โดยดูจากตัวอย่าง first forward divided-difference มี error of order เท่ากับ h

Similary, first backward divided-difference is,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \qquad \text{(Error of order } h\text{)}$$

and central divided-difference is,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2) \qquad \text{(Error of order } h^2\text{)}$$

FIRST FORWARD DIVIDED-DIFFERENCE

From Taylor series:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + h f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

where h is the interval between x_i and x_{i+1}, then

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} f''(x_i) + \ldots$$

or

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + O(h)$$

where $O(h)$ represents the error of order h. The above is called first forward divided-difference because the function data at x_i and x_{i+1} are used.